1. LEKCIJA

AKSIOME I OSOBINE VEROVATNOĆE

TEORIJA VEROVATNOĆE

Teorija verovatnoće proučava i objašnjava zakonitosti koje nastaju pri istovremenom uticaju velikog broja slučajnih faktora. Ova matematička disciplina je osnova matematičke statistike, teorije slučajnih procesa, teorije masovnog opsluživanja, teorije pouzdanosti, itd. Primenjuje se u raznim oblastima, kao što su: statistička fizika, geodezija (račun izravnanja), stohastička hidrologija, biologija (zakoni nasleđivanja), medicina, meteorologija (prognoziranje vremena), astronomija, demografija, ekonomija, itd.

Prvi radovi evropskih matematičara koji su sadržali osnovne ideje teorije verovatnoće pojavili su se u XVI i XVII veku i bili u vezi sa određivanjem šansi dobitka u igrama na sreću. Takve radove možemo naći kod Kardana, Paskala i Fermaa. Sledeća etapa se vezuje za Jakoba Bernulija. Teorema koju je on dokazao, a koja se danas naziva Bernulijev zakon velikih brojeva, predstavljala je teoretsku osnovu tada razmatranih činjenica. Značajan doprinos razvoju teorije verovatnoće dali su takođe Muavr, Laplas, Gaus, Puason, kao i Čebišev, Markov i mnogi drugi naučnici. Aksiomatsko zasnivanje teorije verovatnoće je rezultat radova Kolomogorova iz tridesetih godina XX veka.

(nastavak na str. 4)

MALO ISTORIJE

Evo nekoliko podataka iz života i rada naučnika koji su svojim radovima doprinosili razvoju Teorije verovatnoće.

Đirolamo (latinski: Hijeronimus) **Kardano** (1501-1576), italijanski matematičar, filozof i lekar. U mladosti se bavio isključivo medicinom, da bi kasnije postao profesor matematike u Bolonji i Milanu. Za Kardana se obično vezuju formule za određivanje korena jednačine trećeg stepena, koje je objavio 1545, mada je taj rezultat prvi dobio Nikolo Tartalja, takođe italijanski matematičar tog doba. Kardano je napisao knjigu o igrama sa kockicama i sistematski obradio računanje verovatnoća događaja u tim igrama.

Blez **Paskal** (1623-1662), francuski matematičar, fizičar i filozof. U porodici njegovih roditelja su se redovno sastajali matematičari i fizičari, što je kasnije preraslo u Parisku akademiju nauka. Pre Paskala niko od matematičara nije računao verovatnoće događaja na način na koji se to i sada radi. Među mnogim rezultatima koji se vezuju za Paskalovo ime je i poznati "Paskalov trougao", šema u kojoj su zapisani binomni koeficijenti. U okviru evropske matematike to je bila značajna novost i važan rezultat. Interesantno je međutim da su Kinezi početkom XIV veka već imali takvu šemu.

Pjer **Ferma** (1601-1665), francuski pravnik i matematičar. Bavio se teorijom brojeva, geometrijom, algebrom i teorijom verovatnoće. Njegova prepiska sa Blezom Paskalom je osnov teorije verovatnoće.

Jakob **Bernuli** I (1654-1705), švajcarski matematičar. Njegov doprinos matematici obuhvata razvoj analize beskonačno malih veličina, teorije redova, varijacionog računa i teorije verovatnoće. U teoriji verovatnoće Jakob Bernuli je dokazao jedan specijalan slučaj zakona velikih brojeva i konstruisao model za opisivanje niza nezavisnih eksperimenata, tzv. Bernulijeva, ili binomna, šema. Otac Leonarda Ojlera, čuvenog matematičara, bio je učenik Jakoba Bernulija. Mnogi članovi porodice Bernuli bavili su se matematikom: Johan Bernuli I, Nikola Bernuli I, Nikola Bernuli II, Danijel Bernuli, Johan Bernuli II, Johan Bernuli III, Jakob Bernuli II.

Abraham de **Muavr** (1667-1754), engleski matematičar, rođen u Francuskoj. Dokazao je važnu teoremu iz teorije verovatnoće, i ta teorema postoji u svim udžbenicima iz ove oblasti. U teoriju verovatnoće je uveo pojam slučajnog događaja. Osim teorije verovatnoće bavio se teorijom redova i teorijom kompleksnih brojeva.

Pjer Simon **Laplas** (1749-1827), francuski matematičar, fizičar i astronom. Učio je u školi benediktinskog monaškog reda, ali je kasnije postao ateista. Njegovi rezultati su fundamantalni u matematici, eksperimentalnoj i matematičkoj fizici i astronomiji. Razvio je i sistematizovao rezultate Paskala, Fermaa, Bernulija, dokazao teoremu koja se naziva Muavr-Laplasova teorema. Uveo je i pojam matematičkog očekivanja. Njegova knjiga "Analitička teorija verovatnoće" je još za njegovog života imala tri izdanja.

O Gausu, Puasonu, Čebiševu, Markovu i Kolmogorovu biće reči kasnije.

SLUČAJNI DOGAĐAJI

Prilikom proučavanja raznih problema uočavaju se pojave koje se ostvaruju pri realizaciji nekog kompleksa uslova. Jedna realizacija posmatranog kompleksa uslova naziva se *eksperimentom*. Posmatraju se eksperimenti koje je moguće ponoviti neograničen broj puta pri istim uslovima. Pre izvođenja eksperimenta se tačno zna šta se smatra ishodom eksperimenta i poznat je skup mogućih ishoda, ali ishod svakog pojedinačnog eksperimenta nije unapred poznat. Takvi eksperimenti se često nazivaju stohastički eksperimenti, za razliku od determinističkih eksperimenata, u kojima su ishodi poznati i pre izvođenja eksperimenta.

U teoriji verovatnoće je **elementaran događaj** ili **elementaran ishod** osnovni pojam i ne definiše se. Skup svih elementarnih ishoda jednog eksperimenta je **prostor elementarnih ishoda**. U opštem slučaju će prostor elementarnih ishoda biti označen sa Ω, a njegovi elementi sa ω.

U zavisnosti od rezultata koji se posmatraju, formira se odgovarajući prostor elementarnih ishoda. Prostor elementarih ishoda može imati konačno mnogo, prebrojivo mnogo ili neprebrojivo mnogo elementarnih ishoda.

Definicija 1. ***Slučajni događaj***
Ako je A podskup skupa Ω, tada je A slučajni događaj.

Pošto su prostor elementarnih ishoda i slučajni događaji skupovi, to će biti korišćeni termini kao u teoriji skupova, uz neke specifične termine, kao što je – realizovanje događaja: ako je A slučajni događaj i ako je rezultat eksperimenta jedan od elementarnih događaja koji pripada A , tj. elementarni događaj koji ima osobinu kojom se događaj A definiše, tada se kaže: **događaj A se ostvario (realizovao).**

Skup A može biti i jednočlan. Znači, svaki elementarni događaj je slučajni događaj.

Ceo skup Ω i prazan skup Φ su takođe slučajni događaji i imaju posebne nazive: skup datih elementarnih događaja Ω je **siguran (izvestan, pouzdan) događaj**, a prazan skup Φ u Ω je **nemoguć** događaj.

Slučajni događaji se označavaju velikim slovima abecede *A, B, C*,... ili, po potrebi, sa indeksima A_1, A_2, A_3, … Pošto se razmatraju samo slučajni događaji, često će, umesto slučajni događaj, pisati samo - događaj.

(nastavak na str. 6)

Primer 1. Prostori elementarnih ishoda i slučajni događaji

Neka eksperiment predstavlja bacanje dve numerisane kocke, od kojih je jedna bele, a druga plave boje. Neka su strane tih kocki numerisane brojevima na uobičajen način: 1, 2, 3, 4, 5, 6. U vezi sa tim eksperimentom mogu se formirati prostori elementarnih ishoda sa konačno, prebrojivo i neprebrojivo mnogo ishoda:

I slučaj: Ako se beleže brojevi koji se dobijaju na gornjim stranama kocki, tada ima 36 mogućih ishoda. Ti ishodi su uređeni parovi brojeva (i, j), gde $i, j \in \{1, 2,\ldots, 6\}$, i je broj dobijen na gornjoj strani bele, a j broj dobijen na gornjoj strani plave kocke. Tada je prostor elementarnih ishoda $\Omega_1 = \{(1,1), (1,2),\ldots, (6,6)\}$. **Slučajni događaji** vezani za prostor elementarnih ishoda Ω_1:

Neka događaj A znači da je na prvoj kocki dobijen neparan broj, a da je na drugoj kocki dobijena „šestica“. Elementarni ishodi koji definišu događaj A su (1,6), (3,6), (5,6), pa može da se napiše $A=\{(i, j) \mid i \in \{1, 3, 5\}, j = 6\}$. Ako je rezultat jednog eksperimenta (3,6) kaže se da se u tom eksperimentu realizovao događaj A, jer se desio jedan od elementarnih ishoda koji pripadaju događaju A. Isto se kaže i ako je rezultat eksperimenta (1,6), ili ako je rezultat (5,6).

Neka događaj B označava da je broj dobijen na prvoj kocki veći od broja dobijenog na drugoj kocki. Elementarni ishodi koji definišu događaj B su (2,1), (3,1), (4,1), (5,1), (6,1), (3,2), (4,2), (5,2), (6,2), (4,3), (5,3), (6,3), (5,4), (6,4), (6,5). Može se pisati i $B = \{(i, j) \mid i > j\}$. Ako je rezultat jednog ekserimenta (4,1), tada se realizovao događaj B.

Događaj $C = \{(1, j) \mid j \geq 7\}$ je nemoguć događaj jer označava da se na prvoj kocki dobije 1, a na drugoj kocki broj veći ili jednak 7.

Događaj $D = \{(5,6)\}$ označava da se na prvoj kocki dobije 5, a na drugoj 6 i predstavlja jednočlan podskup posmatranog prostora Ω_1.

II slučaj: Neka kockice baca robot čije je vreme rada neograničeno i neka jedno izvođenje eksperimenta podrazumeva da se kocke bacaju dok se prvi put ne pojave dve „petice“. Kao rezultat eksperimenta beleži se redni broj bacanja u kome su se prvi put pojavile dve „petice“. Prostor elementarnih ishoda je $\Omega_2 = N$ (skup prirodnih brojeva). **Slučajni događaji** vezani za prostor Ω_2 su, na primer: izvedeno je tačno 5 bacanja, izvedeno je ne više od 4 bacanja, izvedeno je bar tri bacanja kockica.

III slučaj: Ukoliko se posmatraju na svakoj kocki strane sa brojem 1, može se kao rezultat beležiti ugao koji grade te strane posle jednog bacanja. Tada je skup mogućih ishoda skup realnih brojeva $[0,\pi)$ koji odgovaraju radijanskoj meri posmatranog ugla. Prostor elementarnih ishoda je $\Omega_3 = [0, \pi)$. **Slučajni događaji** vezani za prostor Ω_3 su, na primer: ugao je oštar, sinus ugla je manji od 0.5, ugao je manji od $\pi/3$, a veći od $\pi/4$.

Naravno, ovo nisu jedini prostori elementarnih ishoda u vezi sa posmatranim eksperimentom. Na primer, ako se beleži zbir dobijenih brojeva, ima 11 mogućih ishoda i to su brojevi 2, 3,...12. Prostor elementarnih ishoda je sada $\Omega_4 = \{2, 3,\ldots 12\}$.

Isti eksperiment se može posmatrati i kao deterministički, ako se posmatra ishod – kockice su pale na podlogu. Dakle, sve zavisi od toga šta se posmatra kao rezultat eksperimenta.

Relacije u skupu događaja

U skupu slučajnih događaja definišu se neke relacije kojima se opisuju međusobni odnosi događaja.

Definicija 2. ***Relacija inkluzije***

Ako svako ostvarivanje događaja A povlači (implicira) ostvarivanje događaja B, tada događaj A povlači (implicira) događaj B.

To znači da svaki elementarni događaj koji pripada A je istovremeno elementarni događaj koji pripada B. Zbog toga se za ovu relaciju koristi ista oznaka koja se koristi u teoriji skupova i piše: $A \subset B$. Takođe se kaže da su događaji A i B u **relaciji inkluzije.**

Definicija 3. ***Jednakost događaja***

Ako je $A \subset B$ i $B \subset A$, *tada su događaji A i B jednaki (ekvivalentni).*

Takođe se kaže da su A i B u **relaciji jednakosti.**

U slučaju jednakosti događaja A i B svaki elementarni ishod koji pripada događaju A, pripada i događaju B, i obrnuto. Znači, ako se događaji posmatraju kao skupovi elementarnih ishoda, ti skupovi će biti jednaki i zato se za jednakost događaja A i B koristi oznaka: A = B.

Ako se za neka dva događaja A i B, koji su iz istog postora elementarnih ishoda, napiše $A \subseteq B$, to znači da se naglašava da može biti $A \subset B$ ali i A = B.

Za proizvoljni događaj X iz prostora Ω važi: $\Phi \subseteq X \subseteq \Omega$.

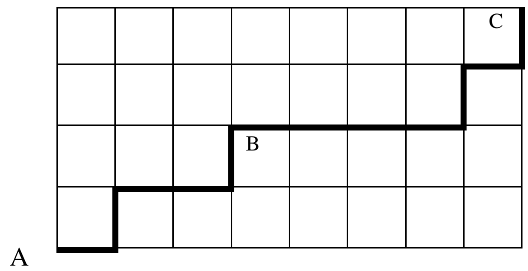
Pored ove dve relacije postoje i druge relacije, na primer relacija disjunkcije, koja će biti definisana kasnije.

(nastavak na str. 8)

☺ U Primeru 1. za događaje A i D važi: $D \subset A$. A ako se posmatra događaj A i događaj $E = \{(i, j) \mid i = 6 - k, k = 1,3,5, j = 6\}$, tada je A = E.

ZADACI (1)

1. Od slova reči POPOKATEPETL na slučajan način se bira jedno slovo. Šta je prostor elementarnih ishoda? Opisati događaje: A – izbor slova koje je među prvih 15 slova azbuke, B – izbor jednog od slova koja se ponavljaju, i C – izbor jednog od samoglasnika.
2. U kutiji su kuglice numerisane brojevima od 1 do 24. Na slučajan način se bira jedna kuglica i posmatra koji broj je dobijen. Odrediti prostor elementarnih ishoda. Događaj A označava da je dobijen broj deljiv sa 2, a događaj B da je dobijen broj deljiv sa 3. Koji elementarni ishodi čine ove događaje?
3. Odrediti prostor elementarnih ishoda u igri LOTO.
4. Novčić se baca 4 puta. Odrediti prostor elementarnih ishoda. Neka je A događaj da su rezultati prvog i četvrtog bacanja različiti, a B događaj da su dobijena tačno dva „pisma“. Opisati te događaje.
5. Na datoj mapi je dozvoljeno kretanje samo u desno i na gore. Opisati prostor elementarnih ishoda, ako se put bira na slučajan način. Opisati događaj da slučajno izabrani put od A do C prođe kroz tačku B.



☺ Relacija jednakosti ima osobine: **refleksivnost** – za svaki događaj A važi A=A, **simetričnost -** za svaka dva događaja A i B iz A=B sledi B=A, **tranzitivnost** – za proizvoljna tri događaja A, B i C iz A=B i B=C sledi A=C. Stoga se kaže da je to jedna **relacija ekvivalencije**.

☺ Relacija inkluzije je tranzitivna, ali nije simetrična ni refleksivna.

Sample space is a complete set of all possible results or outcomes for an experiment. An **event** is a particular collection of outcomes and is a subset of the sample space. The word event was used by de Moivre in 1718.

Operacije u skupu događaja

U skupu slučajnih događaja definišu se neke operacije kojima se, po određenim pravilima, od zadatih (poznatih) događaja fomiraju novi.

Definicija 4. ***Komplement događaja***

Događaj $\overline{A}$ koji se realizuje ako i samo ako se događaj A ne realizuje je komplement događaja A.

Kaže se i: događaj $\overline{A}$ je **suprotan događaju A** ili događaj $\overline{A}$ je **komplementaran** događaju A. Koristi se još i oznaka A^C.

Definicija 5. ***Presek događaja***

Ako se događaj C realizuje ukoliko se realizuju i događaj A i događaj B, tada je događaj C presek događaja A i B.

Događaju *C* pripadaju svi elementarni ishodi koji pripadaju i događaju *A* i događaju *B*, pa se stoga za presek događaja koristi oznaka za presek skupova i pišemo $C = A \cap B$, ili, kraće, *C*=*AB*.

Ako je $AB = \Phi$ (što znači da se A i B ne mogu ostvariti istvremeno), tada se kaže da su A i B međusobno **disjunktni događaji** (isključuju se). Na taj način se pomoću operacije presek i relacije jednakosti definiše nova relacija među događajima – **relacija disjunkcije**.

Neka je $A_1, A_2, ..., A_n$ konačan niz događaja. Njihov presek $C = A_1 A_2 ... A_n$ je događaj koji se ostvaruje ako i samo ako se ostvare svi događaji iz posmatranog niza. Slično važi i za presek beskonačno mnogo događaja.

Definicija 6. ***Unija događaja***

Ako se događaj F realizuje ukoliko se realizuje bar jedan od događaja A i B, tada je događaj F unija događaja A i B.

Događaju F pripadaju elementarni ishodi koji pripadaju događaju A ili koji pripadaju događaju B, pa se zato za uniju događaja koristi ista oznaka kao i za uniju skupova i piše: $F = A \cup B$

Ukoliko su događaji A i B disjunktni, tada se za uniju tih događaja može da koristi i oznaka: $A+B$.

(nastavak na str. 10)

☺ Operacija komplement je **unarna**, jer se od jednog događaja formira nov, a operacije unija i presek su **binarne**, jer se od dva događaja dobija nov događaj.

☺ U slučaju više događaja za presek $A_1A_2...A_n$ koristi se i oznaka $\bigcap_{j=1}^{n} A_j$ kao i $\bigcap_j Aj$, ako se zna skup vrednosti za indeks j. Analogno, za uniju $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$ se koriste oznake $\bigcup_{j=1}^{n} A_j$, ili $\bigcup_j A_j$. Slične su oznake i za presek beskonačno mnogo događaja A_1, A_2, …, odnosno za uniju beskonačno mnogo događaja.

Primer 2. Relacije i operacije sa događajima

Dati su događaji $A_1, A_2, ..., A_n$. Korišćenjem operacija unija, presek i komplement zapisati događaje: D – realizovao se bar jedan od događaja $A_1, A_2, ..., A_n$, E – bar jedan od događaja $A_1, A_2, ..., A_n$ se nije realizovao i F – realizovao se tačno jedan od događaja $A_1, A_2, ..., A_n$.

Rešenje**:** Na osnovu definicija operacija unija, presek i komplement zaključuje se da će biti

$$D = \bigcup_j A_j\ , \quad E = \bigcup_j \overline{A}_j\ .$$

U događaju F nije precizirano koji od datih događaja je realizovan, pa se zato polazi od događaja F_1: od posmatranih događaja realizovao se jedino događaj A_1 i onda je F_1= $A_1\overline{A}_2...\overline{A}_n$, zatim sledi događaj F_2: realizovao se jedino A_2 i F_2 je jednak $\overline{A}_1 A_2...\overline{A}_n$. Tako se dolazi do događaja F_n: realizovao se jedino A_n, što je jednako $\overline{A}_1\overline{A}_2...\overline{A}_{n-1}A_n$, pa se događaj F zapisuje kao unija svih navedenih događaja

$$F = (A_1\overline{A}_2...\overline{A}_n) \cup (\overline{A}_1 A_2...\overline{A}_n) \cup ... \cup (\overline{A}_1\overline{A}_2...\overline{A}_{n-1}A_n) = \bigcup_{i}^{n}\left(A_i \bigcap_{j\neq i} \overline{A}_j \right).$$

Napomena: Događaj E se može napisati i na drugi način, jer je komplementaran događaju: realizovali su se svi događaji $A_1, A_2, ..., A_n$. Tada je $E = \overline{\bigcap_j A_j}$. Znači, važi jednakost $\overline{\bigcap_j A_j} = \bigcup_j \overline{A}_j$ (to je tzv. De Morganov obrazac za više događaja, videti i iskaz Teoreme 1, na str. 12).

The **intersection** of two events A and B is the event “both A and B occur”.
The **union** of two events A and B is the event “either A or B occur”. It should be noted that the “or” is inclusive and therefore the union includes the case when both events occur.

Neka je $A_1, A_2, ..., A_n$ konačan niz događaja. Njihova unija D je

$$D = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = \bigcup_{j=1}^{n} A_j$$

i predstavlja događaj koji se ostvaruje ako se ostvari bar jedan od događaja iz posmatranog niza. Slično važi i za uniju beskonačno mnogo događaja.

U Primeru 1. je $A \cup D = A$ kao i $A \cup \overline{A} = \Omega$. Ova druga relacija važi za svaki događaj. Naime, za svaki događaj $X \subseteq \Omega$ je $X \cup \overline{X} = \Omega$. Takođe, za svaki događaj $X \subseteq \Omega$ je $X \cap \overline{X} = \Phi$.

Može se pokazati da su operacije presek i komplement (ili unija i komplement) dovoljne da se zapiše svaki događaj iz prostora elementarnih ishoda. Dalje će se ipak koristiti (ravnopravno) sve tri već definisane operacije. Postoje i operacije izvedene od tri osnovne, kao što su operacije date u definicijama 7 i 7a.

Definicija 7. ***Razlika događaja***

Ako se događaj C realizuje ukoliko se realizuje događaj A i ne realizuje događaj B, tada je događaj C razlika događaja A i B.

Na osnovu definicije zaključuje se da je razlika događaja A i B jednaka događaju $A \cap \overline{B}$. Za razliku događaja koristi se oznaka: A\B.

Definicija 7a. ***Simetrična razlika događaja***

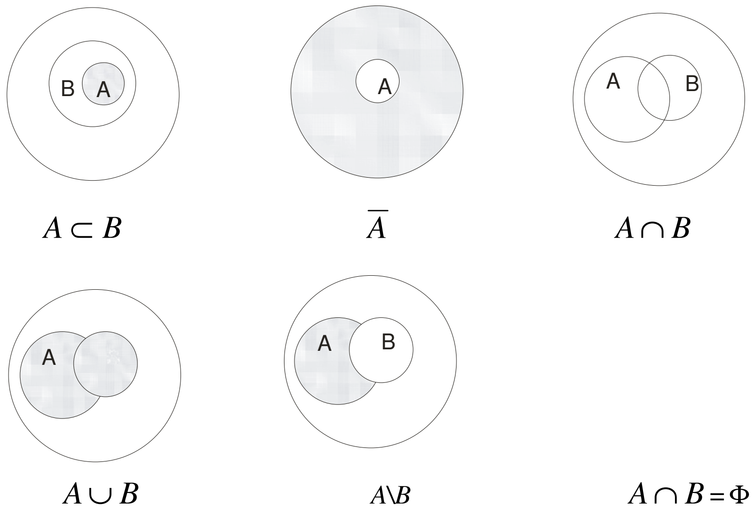
Ako se događaj D realizuje ukoliko se realizuje A\B *ili ukoliko se realizuje B*\A, *onda je događaj D simetrična razlika događaja A i B.*

Na osnovu definicije zaključuje se da je simetrična razlika događaja A i B jednaka uniji događaja A\B i *B*\A. Za simetričnu razliku se koristi oznaka AΔB.

Kada se posmatra više događaja na istom prostoru elementarnih ishoda, bitno je poznavati međusobne odnose tih događaja. Posebno je u teoriji verovatnoće važan slučaj opisan u sledećoj definiciji, a njegova primena će biti razmotrena kasnije.

(nastavak na str. 12)

☺ Relacije i operacije sa događajima se mogu slikovito prikazati pomoću Venovih dijagrama.



Slika 1. Relacije i operacije sa događajima
(veliki krug predstavlja Ω)

Džon Ven (1834-1923), engleski matematičar i logičar. Predavao je logiku i moral na Kembridžu. Zalagao se za simboličku logiku. U teoriji skupova njegovo ime nose dijagrami kojima se predstavljaju relacije i operacije sa skupovima.

ZADACI (2)

1. Novčić se baca 4 puta. Neka je A događaj da su rezultati prvog i četvrtog bacanja različiti, a B događaj da su dobijena tačno dva „pisma“. Opisati događaje: $A \cup B, A \cap B, \overline{A} \cap B, A \cap \overline{B}$.

2. Neka su A, B i C događaji iz istog prostora elementarnih ishoda. Istinitost sledećih tvrđenja proveriti skicirajući na dijagramu događaje na levoj i na desnoj strani znaka jednakosti:

a) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$,

b) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (A \cup C)$, $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (A \cap C)$,

c) $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$
$\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Venn diagram is a simple diagram used to represent unions and intersections of sets. The diagram described by Venn in 1880 and popularized by his book *Symbolic Logic*, was introduced by Leibnitz in the XVIII century.

Definicija 8. ***Potpun sistem događaja***

Ako su događaji $A_1, A_2, ..., A_n$ međusobno disjunktni u parovima i ako je njihova unija siguran događaj, tada događaji $A_1, A_2, ..., A_n$ čine potpun sistem događaja.

Na osnovu definicije za događaje iz potpunog sistema događaja važi:

$$1^\circ \quad A_i \cap A_j = \Phi, i \neq j, i, j \in \{1,2,...,n\},$$

$$2^\circ \quad \bigcup_{j=1}^{n} A_j = \Omega$$

Ako događaji $A_1, A_2, ..., A_n$ čin potpun sistem događaja, tada se kaže da oni čine **razlaganje** (razbijanje) Ω.

Neke od osobina definisanih relacija i operacija daje sledeća teorema:

Teorema 1. ***Osobine relacija i operacija sa događajima***

Za slučajne događaje A, B, C,... iz istog prostora elementarnih ishoda važi:

$1^\circ\ AB \subseteq A \subseteq A \cup B$

$2^\circ\ \overline{\overline{A}} = A$

$3^\circ\ A \subset B \Rightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$

$4^\circ\ A \cup B = B \cup A$

$5^\circ\ A \cap B = B \cap A$

$6^\circ\ (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

$7^\circ\ (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

$8^\circ\ (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (A \cup C)$

$9^\circ\ (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (A \cap C)$

$10^\circ\ \overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$

$11^\circ\ \overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$

(De Morganovi obrasci)

De Morganovi obrasci se mogu uopštiti i posmatrati za konačne ili beskonačne prebrojive unije i preseke slučajnih događaja:

$$\overline{\left(\bigcup_k A_k\right)} = \bigcap_k \overline{A_k}, \qquad \overline{\left(\bigcap_k A_k\right)} = \bigcup_k \overline{A_k}$$

(nastavak na str. 14)

Primer 3. Potpun sistem događaja

1. U n jednakih kutija, koje su poređane jedna do druge, nalazi se M jednakih kuglica. Kuglice su raspoređene na slučajan način, ali uz jedan od sledećih dopunskih uslova:
a) Broj belih kuglica u svakoj kutiji može biti 0, 1, 2.
b) U nekih p kutija nema belih kuglica, u nekih q kutija ima po jedna bela kuglica i u nekih r kutija su po dve bele kuglice.
c) U prvih p kutija nema belih kuglica, u sledećih q kutija se nalazi po jedna bela kuglica i u poslednjih r kutija u nizu se nalaze po dve bele kuglice, pri čemu, u slučajevima b) i c) važi $p+q+r=n$, $q+2r=M$, $p>0$, $q>0$, $r>0$, $M \geq 2$. Na slučajan način se iz jedne od kutija bira jedna kuglica.

U svakom od navedenih slučajeva, postoje dva potpuna sistema događaja:

(I) A_1 - izbor iz prve kutije, A_2 - izbor iz druge kutije, ..., A_n - izbor iz n-te kutije,

(II) B_1 - izbor iz jedne od kutija u kojoj nema belih kuglica, B_2 - izbor iz jedne od kutija u kojoj ima po jedna bela kuglica i B_3 - izbor iz jedne od kutija u kojoj su po dve bele kuglice.

2. Šalju se tri poruke preko nekog kanala veze (telefon, telegraf, signalne zastave, e-mail...). Posmatraju se sledeći događaji:

A – sve tri poruke su predate bez grešaka
B – sve tri poruke su predate sa greškama
C – bar dve poruke su predate sa greškama
D_i - tačno i poruka je predato bez greške, $i=1, 2$.

Tada događaji A, D_1, D_2 i B čine potpun sistem događaja, dok događaji A, B, C, D_i ne čine potpun sistem događaja (nisu međusobno disjunktni u parovima).

3. Ako su događaji A i B proizvoljni različiti događaji iz istog prostora elementarnih ishoda, tada događaji A, $\overline{A}B, \overline{A}\overline{B}$ čine potpun sistem događaja.

☺ U iskazu Teoreme 1, osim De Morganovih obrazaca, još neke osobine imaju posebne nazive:

komutativnost unije - osobina 4,
komutativnost preseka – osobina 5
asocijativnost unije – osobina 6
asocijativnost preseka – osobina 7
distributivnost unije u odnosu na presek – osobina 8
distributivnost preseka u odnosu na uniju – osobina 9

Avgustus de **Morgan** (1806-1871), škotski matematičar i logičar. Bio je prvi predsednik Londonskog matematičkog društva, a po njemu se danas zove jedna od nagrada ovog društva. Bio je profesor matematike na univerzitetskom koledžu u Londonu. Smatra se jednim od osnivača formalne algebre.

AKSIOMATIKA TEORIJE VEROVATNOĆE

Pri aksiomatskom zasnivanju verovatnoće polazi se od izvesnog broja osnovnih tvrđenja, tzv. aksioma, na osnovu kojih se sve ostale osobine mogu dokazati. Za posmatrani (proizvoljni) prostor elementarnih ishoda aksiomatizacija daje najmanji mogući broj uslova koji obezbeđuju kakvi treba da budu podskupovi prostora elementarnih ishoda da bi bilo moguće da se računaju verovatnoće pojavljivanja tih događaja, i koji je najmanji mogući broj uslova koje verovatnoća događaja treba da zadovoljava. Sistem aksioma Teorije verovatnoće dao je A. N. Kolmogorov 1933. godine.

Najpre se mora ustanoviti jedna struktura u okviru prostora elementarnih ishoda, tzv. σ-polje događaja.

Definicija 9. *σ-polje događaja*
Neka je $\mathcal{F}$ *familija događaja iz Ω sa osobinama:*

$A1^\circ$ *Pouzdan događaj Ω pripada familiji* $\mathcal{F}$

$A2^\circ$ *Ako neki događaj A pripada familiji* $\mathcal{F}$*, onda i* $\overline{A}$ *pripada familiji* $\mathcal{F}$.

$A3^\circ$ *Ako je* $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ *bilo koji konačan ili prebrojiv niz događaja koji pripadaju* $\mathcal{F}$*, tada i njihova unija pripada* $\mathcal{F}$.

Takva familija događaja $\mathcal{F}$ *je σ-polje ili σ-algebra događaja.*

Ako je skup svih elementarnih ishod konačan skup, tada je i svaka familija događaja iz Ω konačna familija. Ako za jednu takvu familiju $\mathcal{F}$ važe uslovi $A1^o$ i $A2^o$, a umesto $A3^o$ važi da za svaki konačan niz događaja iz familije $\mathcal{F}$ i njihova unija pripada toj familiji, onda je posmatrana familija $\mathcal{F}$ - **polje događaja.**

Nad istim prostorom elementarnih ishoda možemo posmatrati više različitih polja ili σ-polja događaja.

Presek dva polja (σ-polja) je polje (σ-polje) događaja. Unija dva polja (σ-polja) ne mora biti polje (σ-polje) događaja.

(nastavak na str. 16)

Andrej Nikolajevič **Kolmogorov** (1903-1987) sovjetski matematičar, član Akademije nauka Sovjetskog saveza od 1939. Sa velikim uspehom bavio se mnogim matematičkim disciplinama: analizom funkcija realne promenljive, teorijom verovatnoće, matematičkom statistikom i topologijom (to su samo neke od oblasti u kojima su njegovi radovi imali značajnog uticaja). Njegovi učenici i sledbenici su među najpoznatijim ruskim (sovjetskim) matematičarima.

☺ U vezi sa poljem događaja treba obratiti pažnju na sledeće: Ako neki događaj A pripada polju (ili σ-polju) događaja $\mathcal{F}$ tada, u opštem slučaju nije poznato da li događaj B za koji važi $B \subset A$, pripada $\mathcal{F}$. Takav zaključak se ne može dobiti na osnovu aksioma. U sledećem primeru se može videti da navedena osobina ne može da važi u opštem slučaju.

Primer 4. Polja događaja

Neka je Ω proizvoljan prostor elementarnih ishoda i $A \subset \Omega$. Familija $\mathcal{F}_1=\{ \Omega, \Phi, A, \overline{A} \}$ je polje događaja. Takođe je $\mathcal{F}_2= \{\Omega, \Phi\}$ polje (tzv. trivijalno polje) događaja. U oba slučaja je jasno da proizvoljni neprazni podskup nekog elementa iz *F* ne može da pripada *F*.

☺ U specijalnom slučaju, kada je polje događaja $\mathcal{F}$ **partitivni skup** skupa Ω, tada za svaki događaj A koji pripada $\mathcal{F}$ svaki događaj B za koji važi $B \subset A$, sledi da B pripada $\mathcal{F}$. Partitivni skup skupa Ω je skup svih podskupova tog skupa, pa je zato jasno da važi navedeni zaključak.

☺ Ako je prostor elementarnih ishoda Ω konačan i ima n elemenata, a polje $\mathcal{F}$ partitivni skup skupa Ω, tada polje $\mathcal{F}$ ima 2^n elemenata.

ZADATAK

Odrediti partitivni skup skupa {1,2,3}.

☺ Na osnovu same definicije polja događaja, ali i na osnovu primera 4 i pojma partitivnog skupa jasno je da nad istim prostorom elementarnih ishoda postoje različita polja događaja. Tako je polje $\mathcal{F}_4=\{ \Omega, \Phi, B, \overline{B} \}$ različito od polja $\mathcal{F}_1$, ako je događaj A različit od događaja B. Presek polja $\mathcal{F}_1$ i polja $\mathcal{F}_4$ je polje $\mathcal{F}_2$. Unija polja $\mathcal{F}_1$ i polja $\mathcal{F}_4$ nije polje, jer ne sadrži uniju događaja A i B. Polje događaja koje bi sadržalo i A i B je moguće formirati kao partitivni skup skupa koji čine događaji: A, $B\overline{A}$, $\overline{A \cup B}$.

Ako neka familija događaja predstavlja polje (ili σ-polje), onda toj familiji događaja obavezno pripadaju i preseci i razlike događaja koje sadrži. Ova osobina je navedena u sledećoj teoremi.

Teorema 2. ***Osobina polja događaja***

Ako su A i B događaji koji pripadaju polju (ili σ-polju) događaja $\mathcal{F}$, tada i događaji $A \cap B$, $A \backslash B$ pripadaju polju (ili σ-polju) $\mathcal{F}$.

Dokaz:

Na osnovu $A2^\circ$ je $\overline{A} \in \mathcal{F}$ i $\overline{B} \in \mathcal{F}$. Tada je, na osnovu $A3^\circ$ i $\overline{A} \cup \overline{B} \in \mathcal{F}$, pa je na osnovu $A2^\circ$ događaj $C = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}} \in \mathcal{F}$. Po De Morganovim obrascima je $C = A \cap B$, čime je završen dokaz prvog dela tvrđenja.

Dokaz da razlika događaja pripada polju događaja se zasniva na definiciji razlike događaja i sličan je prethodnom dokazu.

Tvrđenje Teoreme 2 se može formulisati i na sledeći način: σ-polje događaja je zatvoreno u odnosu na presek događaja i u odnosu na razliku događaja.

Borelova σ-polja

Često se σ-polje određuje polazeći od neke kolekcije *C* podskupova Ω (v. Primer 4 b)). Za svaku kolekciju *C* postoje σ-polja koja je sadrže (npr. partitivni skup je jedno takvo σ-polje). Presek svih σ-polja koja sadrže *C* je σ-polje i naziva se **minimalno σ-polje generisano kolekcijom C**, i označava se sa σ(C).

Ako umesto prostora Ω uzmemo skup realnih brojeva *R* i kolekciju *C* koju čine intervali oblika $(-\infty, a)$, $a \in R$, tada se odgovarajuće minimalno σ-polje generisano kolekcijom C naziva **Borelovo σ-polje na R**, i označava se sa $\mathcal{B}$. Njegovi elementi su Borelovi skupovi, a uređeni par (R, $\mathcal{B}$) je Borelova prava.

(nastavak na str. 18)

Primer 4a. Polje događaja

Neka je prostor elementarnih ishoda prostor Ω_4 iz Primera 1 i u tom prostoru elementarnih ishoda neka su događaji: A – zbir je paran broj, B – zbir je deljiv sa šest. Odrediti najmanje polje događaja koje sadrži događaje A i B.

Rešenje.

Uoči se jedno od mogućih razlaganja prostora elementarnih ishoda na potpun sistem događaja koristeći događaje A i B. Potpun sistem događaja čine događaji B, A\B, $\overline{A}$ i pomoću njih se formira najmanje polje događaja. Polazeći od tih događaja na osnovu Definicije 9 formira se polje $\mathcal{F}$.

Po aksiomi $A1^{\circ}$, siguran događaj Ω_4 pripada polju. Zatim, po aksiomi $A2^{\circ}$, pošto B pripada polju, tada će i $\overline{B}$ pripadati polju. Takođe, pošto A\B pripada polju, onda će i $\overline{A \setminus B}$ pripadati polju, a kako $\overline{A}$ pripada polju, tada će i komplement $\overline{A}$, odnosno događaj A, pipadati polju. Najzad, i nemoguć događaj pripada polju, kao komplement sigurnog događaja, pa dobijamo polje:

$$\mathcal{F} = \{\, \Omega_4, \Phi, A, \overline{A}, B, \overline{B}, A\setminus B, \overline{A \setminus B} \,\}.$$

Formirano polje se poklapa sa partitivnim skupom skupa $\{\overline{A}, B, A\setminus B\}$.
Partitivni skup $\mathcal{F}^*$ skupa Ω_4 je takođe polje događaja i pri tome važi: $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}^*$.

ZADATAK

U kutiji su kuglice numerisane brojevima od 1 do 24. Na slučajan način se bira jedna kuglica. Događaj A označava da je dobijen broj deljiv sa 2, a događaj B da je dobijen broj deljiv sa 3. Odrediti minimalno polje događaja određeno događajima A i B.

☺ Teorema 2 je specijalan slučaj opštijeg tvrđenja: σ-polje je zatvoreno u odnosu na prebrojivu primenu operacija unija, presek i komplement izvedenih u proizvoljnom poretku nad elementima posmatranog σ-polja. To znači, na primer, ako su $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ događaji koji pripadaju nekom σ-polju događaja $\mathcal{F}$, tada i događaji $\bigcup_{j=1}^{\infty} \overline{A}_j$, $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j$ pripadaju σ-polju $\mathcal{F}$.

Feliks Eduar Žisten Emil **Borel** (1871-1956), francuski matematičar. Bio je član Pariske akademije nauka od 1921. Bavio se sa velikim uspehom mnogim matematičkim disciplinama: teorijom brojeva, algebrom, geometrijom, matematičkom fizikom i teorijom verovatnoće.

Definicija i osobine verovatnoće

Pri aksiomatskom zasnivanju teorije verovatnoće, verovatnoće događaja definišu se samo za događaje koji pripadaju nekom polju (ili σ-polju) događaja.

Definicija 10. ***Verovatnoća***

Neka realna funkcija P definisana na σ-polju $\mathcal{F}$ događaja iz Ω ima osobine:

$B1^\circ$ *Za svaki događaj A koji pripada $\mathcal{F}$ važi* $P(A) \geq 0$.

$B2^\circ$ *Za siguran događaj Ω važi* $P(\Omega) = 1$.

$B3^\circ$ *Za svaki niz (konačan ili prebrojiv) događaja koji pripadaju $\mathcal{F}$ i koji su međusobno disjunktni u parovima važi:*

$$P\left(\bigcup_j A_j\right) = \sum_j P(A_j)$$

Tada je funkcija P verovatnoća na σ-polju $\mathcal{F}$ **.**

Osobine $B1^\circ$, $B2^\circ$, $B3^\circ$ su aksiome i nazivaju se, redom: **nenegativnost, normiranost i aditivnost.**

Aksiome teorije verovatnoće su $A1^\circ, A2^\circ, A3^\circ$, $B1^\circ$, $B2^\circ$, $B3^\circ$, a uređena trojka *(Ω, $\mathcal{F}$, P)* se naziva **prostor verovatnoća.**

Aksiome verovatnoće $B1^\circ$, $B2^\circ$, $B3^\circ$ ne daju način za određivanje verovatnoće u konkretnim zadacima, ali se, polazeći od definicije verovatnoće mogu izvesti mnoge opšte osobine verovatnoće. Neke od tih osobina su date u sledećoj teoremi.

Smatra se da svi događaji koji se javljaju u iskazu teoreme pripadaju istom prostoru elementarnih ishoda i istom polju događaja.

(nastavak na str. 20)

☺ Kolekcije $C_1 = \{(-\infty, a], a \in R\}$, $C_2 = \{(a,b], a < b, a,b \in R\}$ takođe generišu Borelovo σ-polje B, a mogući su i drugi načini. Dakle, minimalna σ-polja generisana ovim kolekcijama se poklapaju:

$$\sigma(C_1) = \sigma(C_2) = ... = \mathrm{B}.$$

☺ U teoriji verovatnoće se Borelova polja primenjuju pri definisanju slučajnih promenljivih, o čemu će kasnije biti govora.

☺ Iako se u definiciji Borelovog polja polazi od intervala određenog oblika, elementi Borelovog polja su i pojedinačni realni brojevi i nizovi (konačni ili beskonačni) realnih brojeva i otvoreni i zatvoreni konačni intervali i njihove konačne ili prebrojive unije.

Primer 5. Elementi Borelovog polja na realnoj pravoj

Pokazati da je broj 55 element Borelovog polja.

Rešenje.

Interval A=(-∞, 55) jeste Borelov skup, pa i njegov komplement jeste Borelov skup, a komplement je B = [55,+ ∞) . Takođe, svi skupovi B_n=(-∞, 55+1/n), gde je n prirodan broj, su Borelovi skupovi, pa je i svaki presek BB_n, koji je oblika C_n=[55, 55+1/n) Borelov skup. Stoga je i presek svih tih skupova Borelov skup. S druge strane, presek skupova C_n je samo jedna tačka, tj. broj 55.

☺ Iako se za konkretni eksperiment obično vezuje samo jedna realna funkcija verovatnoće P, aksiomama $B1^\circ$, $B2^\circ$, $B3^\circ$ verovatnoća nije jednoznačno određena, što ilustruje sledeći primer.

Primer 6. Definisanje verovatnoće na polju događaja

Neka je na elementima polja F ={ *Ω, Φ, A,* $\overline{A}$ } definisana funkcija P: *P(A)=p, P(* $\overline{A}$ *)=1-p, P(Ω)=1, P(Φ)=0.* Tada je P verovatnoća u smislu aksiomatike. Zbog mogućnosti da p može biti bilo koji broj iz intervala (0, 1), sledi da verovatnoća na polju F nije jednoznačno određena. Ako je A pojava grba, a $\overline{A}$ pojava pisma pri bacanju novčića, može se uzeti P(A)=0.5 (homogen, fer novčić), ali i P(A)=0.13 (nehomogen novčić).

The probability of an event is a number lying in the interval 0,1 . For an experiment with N equally likely outcomes the probability of an event A is n/N, where n is the number of outcomes in which the event A occurs.

Teorema 3. ***Osobine verovatnoće***

1° *Ako je* $A \subseteq B$, *tada je* $P(A) \le P(B)$.

2° *Ako je P(A) verovatnoća događaja A, tada je* $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$, *i specijalno* $P(\Phi)=0$.

3° *Ako su A i B dva događaja, tada je*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

4° *Ako je* $A_1, A_2, \ldots$ *konačan ili prebrojiv niz događaja, tada je*

$$P\left(\bigcup_j A_j\right) \le \sum_j P(A_j)$$

5° *Ako događaji* $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ *čine monotono neopadajući niz događaja, tada je*

$$P\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

a ako događaji $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ *čine monotono nerastući niz događaja, tada je*

$$P\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

Napomenimo da se koristi sledeća oznaka: $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \lim_{j\to\infty} A_j$ za monotono neopadajući niz događaja, odnosno $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j = \lim_{j\to\infty} A_j$ za monotono nerastući niz događaja. Stoga se navedene osobine za monotone nizove događaja mogu napisati u obliku:

$$P\left(\lim_{j\to\infty} A_j\right) = \lim_{j\to\infty} P(A_j).$$

Zbog ovoga se navedena osobina naziva neprekidnost verovatnoće.

(nastavak na str. 22)

Dokaz Teoreme 3.

1° Iz $A \subset B$ sledi $B = A + \overline{A}B$, pa je $P(B) = P(A) + P(\overline{A}B)$. Zbog $B1^\circ$ je $P(\overline{A}B) \geq 0$, pa tvrđenje sledi.

2° S obzirom da je $A + \overline{A} = \Omega$, biće $P(A + \overline{A}) = P(\Omega)$. Na osnovu $B2^\circ$ i $B3^\circ$ sledi $P(A) + P(\overline{A}) = 1$, što je i trebalo dokazati.

3° Kako je $A \cup B = A + (B \cap \overline{A})$, a $B = (B \cap A) + (B \cap \overline{A})$, to na osnovu $B3^\circ$ slede zaključci:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B \cap \overline{A}), \quad P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \overline{A}),$$

odakle sledi tvrđenje.

4° Ovo tvrđenje se dokazuje indukcijom na osnovu dokazanog tvrđenja pod 3°.

5° Neka je A_j, $j \in N$ monotono neopadajući niz događaja, tj. neka važi

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \subseteq A_j \subseteq \ldots$$

Definiše se niz događaja B_j, $j \in N$, na sledeći način:

$$B_1 = A_1$$

$$B_n = A_n \overline{\left(\bigcup_{j=1}^{n-1} A_j \right)} = A_n \overline{A}_{n-1}, n > 1$$

Događaji B_n su međusobno disjunktni i važi:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} B_i \text{, kao i } \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$$

Stoga je

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i) = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} P(B_i) =$$

$$= \lim_{n \to \infty} P\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i \right) = \lim_{n \to \infty} P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \right) = \lim_{n \to \infty} P(A_n)$$

Za monotono nerastući niz događaja odgovarajuće svojstvo se dokazuje primenom De Morganovih formula.

Prva osobina navedena u iskazu Teoreme 3 se naziva **monotonost verovatnoće.** Druga osobina se često koristi pri rešavanju zadataka. Naime, u nekim zadacima je jednostavnije odrediti verovatnoću komplementa nekog događaja nego verovatnoću samog posmatranog događaja. U takvim slučajevima primenjuje se navedena formula. Treća od navedenih formula se takođe koristi pri rešavanju zadataka. Nejednakost 4° se naziva **Bulova nejednakost**. Peta osobina se, iz razloga koji su prethodno navedeni, naziva **neprekidnost verovatnoće.**

Klasična definicija verovatnoće

Sada će biti razmotreni neki modeli teorije verovatnoće. To znači da će se analizirati prostori elementarnih ishoda, nevezano za konkretni eksperiment, i na njima definisati verovatnoća. Najpre će biti govora o klasičnoj definiciji verovatnoće. Istorijski gledano, klasična definicija verovatnoće je prethodila aksiomatskom zasnivanju teorije verovatnoće.

Klasična definicija verovatnoće se odnosi na prostor elementarnih ishoda Ω koji je konačan skup, pri čemu su verovatnoće pojavljivanja svih elementarnih ishoda iste. Tada se zapravo posmatra specijalni slučaj prostora elementarnih ishoda sa konačno mnogo elemenata: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$. Elementarnom događaju ω_j pridružuje se broj $p_j > 0,\ j = 1,2,...$, tako da je:

$$p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$$

i broj p_j se naziva verovatnoća elementarnog događaja $\omega_j,\ j = 1,2,...n$.

Događaj A koji sadrži k elementarnih događaja može se predstaviti u obliku:

$$A = \{\omega_{j_1}, \omega_{j_2}, ..., \omega_{j_k}\}$$

Verovatnoća događaja A se definiše kao zbir verovatnoća elementarnih događaja koji pripadaju događaju A:

$$P(A) = p_{j_1} + p_{j_2} + ... + p_{j_k}.$$

To je tzv. **verovatnoća u konačnoj šemi.**

(nastavak na str. 24)

Džordž **Bul** (1815-1864), engleski matematičar. Osnivač matematičke logike. Takođe se bavio i teorijom verovatnoće. Jedna od njegovih ćerki je prva žena koja je bila profesor hemije u Londonu.

☺ Naizgled različiti eksperimenti mogu po strukturi biti isti. Neka je eksperiment bacanje novčića, a kao rezultat se beleži strana na koju je novčić pao. Prostor elementarnih ishoda je dvočlan, a verovatnoća svakog elementarnog ishoda (po pretpostavkom da je novčić fer – masa ravnomerno raspoređena i novčić ima dve različito označene strane) je ½. S druge strane, ako je eksperiment biranje jedne karte iz špila od 52 karte, a rezultat eksperimenta boja, crvena (herc ili karo) ili crna (tref ili pik), tada je ponovo prostor elementarnih ishoda dvočlan, a verovatnoća svakog elementarnog ishoda (pod pretpostavkom da su karte dobro promešane i da niko nije neke karte izbacio iz špila ili ih zamenio drugim) je ½.

☺ Evo još nekih osobina verovatnoće (svi događaji pripadaju istom prostoru elementarnih ishoda i istom polju ili σ – polju $\mathcal{F}$).

(1) $P(A\setminus B)=P(A)-P(AB)$

(2) $\left|P(AB)-P(A)P(B)\right|\le 1/4$

(3) Ako događaji $A_1, A_2,..., A_n$ čine potpun sistem događaja, tada je

$$\sum_{j=1}^{n} P(A_j)=1.$$

(4) $P(A\cap B\cap C)\ge 1-P(\overline{A})-P(\overline{B})-P(\overline{C})$

Uopštenje osobine (4), dokazuje se indukcijom:

(4') $P\left(\bigcap_{j=1}^{n} A_j\right)\ge 1-P(\overline{A}_j)=\sum_{j=1}^{n} P(A_j)-(n-1),\ \ n\ge 4$.

(5)

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$

Uopštenje osobine (5), dokazuje se indukcijom:

(5') Za $n\ge 4$ važi

$$P\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right)=\sum_{j=1}^{n} P(A_j)-\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} P(A_iA_j)+\sum_{i=1}^{n-2}\sum_{j=i+1}^{n-1}\sum_{k=j+1}^{n} P(A_iA_jA_k)-...-(-1)^n P\left(\bigcap_{j=1}^{n} A_j\right)$$

Ako se svakom elementarnom događaju ω_j dodeli ista verovatnoća

$$\omega_j \to p_j = 1/n, \quad j=1,2,...n.$$

dobija se da je verovatnoća događaja A, koji sadrži *k* elementarnih događaja, jednaka

$$P(A) = \frac{k}{n}$$

To je tzv. **klasična definicija verovatnoće.** Dakle, ako prostor elementarnih ishoda ima n jednakoverovatnih elementarnih ishoda i ako događaj A ima k elementarnih događaja iz Ω, tada je verovatnoća pojavljivanja događaja A jednaka k/n.

Za elementarne ishode iz A kaže se da su povoljni ishodi za događaj A. Znači, u klasičnoj definiciji je verovatnoća događaja A jednaka količniku broja povoljnih ishoda za događaj A i broja svih mogućih ishoda.

Za verovatnoću u konačnoj šemi, pa prema tome i za verovatnoću u klasičnoj definiciji važe svi zahtevi iz definicije verovatnoće. Dakle, verovatnoće u konačnoj šemi i verovatnoće u klasičnoj definiciji su jedan konkretan model aksiomatike.

Klasičnu definiciju verovatnoće je dao francuski matematičar Laplas (Pierre Simone Laplace, 1749 – 1827).

Na osnovu klasične definicije verovatnoće se može pokazati da je:

(1) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

(2) $P(\Phi)=0$

(3) $P(\Omega)=1$

(4) $0 \le P(A) \le 1$

(5) $A \subset B \Rightarrow P(A) \le P(B)$

(6) Za disjunktne događaje A i B važi:

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

a za uniju dva događaja u opštem slučaju važi:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Ove osobine se dokazuju neposredno iz definicije. Tako, na primer, iz $P(A)=k/n$ i s obzirom da za broj povoljnih ishoda k važi $0 \le k \le n$, sledi $0 \le P(A) \le 1$.

(nastavak na str. 26)

ZADACI

1. Neka je verovatnoća događaja A jednaka 0.3, verovatnoća događaja B jednaka 0.4, a verovatnoće njihove unije 0.6. Odrediti verovatnoću da se a) realizuju i A i B, b) realizuje A i komplement od B, c) realizuje ili komplement od A ili komplement od B, d) realizuje komplement od A ili komplement od B, e) realizuje razlika događaja A i B.
2. Dokazati da je za proizvoljna dva događaja iz istog prostora verovatnoća tačno $P(A \cap B) \geq 1 - P(\overline{A}) - P(\overline{B})$. Kad važi jednakost? Navesti koji je međusobni odnos događaja da bi važila jednakost, odnosno stroga nejednakost.
3. Tri igrača bacaju novčić. Gubi onaj ko dobije rezultat različit od druge dvojice. Odrediti verovatnoću da će posle prvog bacanja neko izgubiti i odrediti verovatnoću da će neko izgubiti tek u trećem bacanju.
4. Odrediti verovatnoću da se u igri LOTO pogodi svih sedam brojeva, ako se uplati samo jedna „kombinacija“. Da li je veća verovatnoća da se pogodi 3 ili 4 od 7 brojeva?
5. Neka događaji A i B čine potpun sistem događaja i neka za njihove verovatnoće p i q važi 4p – q = 2/3. Odrediti p i q.
6. Verovatnoće događaja A, B i C su redom 0.1, 0.2, 0.3. Odrediti najmanju moguću vrednost za verovatnoću događaja $\overline{A \cup B \cup C}$.
7. Novčić se baca 4 puta. Neka je A događaj da su rezultati prvog i četvrtog bacanja različiti, a B događaj da su dobijena tačno dva „pisma“. Odrediti verovatnoće događaja: $A \cup B, A \cap B, \overline{A} \cap B, A \cap \overline{B}$.
8. Pri bacanju dve numerisane kocke događaj A označava da je dobijen zbir 6, a događaj B da je broj na jednoj kocki dvaput veći od broja na drugoj kocki. Odrediti verovatnoće unije, preseka i razlike događaja A i B.
9. Neka su A, B i C tri proizvoljna događaja iz istog prostora elementarnih ishoda. Poređati u neopadajućem poretku verovatnoće događaja $A \cup B, A \cap B, A, \Omega, (A \cap B) \cap (A \cap C)$.
10. Iz kutije u kojoj su raznobojne kuglice istih dimenzija, i to 5 belih, 4 crne i 3 crvene, na slučajan način i bez vraćanja se izvlače 4 kuglice. Odrediti verovatnoću da je redosled bio crvena, bela, crvena, bela. Odrediti verovatnoću da je redosled bio „dve boje naizmenično“.
11. Neka su za automobilske tablice predviđene oznake od dva slova i četiri cifre, pri čemu se a) slova mogu ponavljati, a prva cifra ne sme biti nula b) slova mogu ponavljati a cifre ne. Odrediti verovatnoću da se slučajno izabere tablica oblika A*34**, gde * označava proizvoljno slovo ili cifru prema određenom pravilu.
12. Na slučajan način je izabrana jedna permutacija cifara 1,2,..., 9. Odrediti verovatnoću da: a) sve parne cifre budu ispred svih neparnih, b) sve parne cifre budu jedna do druge, c) permutacija počinje i završava se parnom cifrom, d) parne cifre gledano s leva na desno čine rastući niz.

12 a) Od devedeset kuglica numerisanih brojevima od 1 do 90, izvlači se 20. Odrediti verovetnoću da se među izabranim nalazi određenih 15 brojeva.
(Nešto kao BINGO ☺)

Geometrijske verovatnoće

Kad prostor elementarnih ishoda ima beskonačno, prebrojivo ili neprebrojivo mnogo, elementarnih ishoda, mogu postojati elementarni ishodi čija je verovatnoće jednaka nuli. Naime, važi sledeća teorema

Teorema 4.

Ako prostor elementarnih ishoda ima beskonačno mnogo elementarnih ishoda, onda najviše prebrojivo mnogo elementarnih ishoda ima verovatnoću različitu od nule.

Ako prostor elementarnih ishoda ima beskonačno neprebrojivo mnogo elementarnih ishoda moguće je i da svi elementarni ishodi imaju verovatnoću jednaku nuli. Upravo takvu situaciju opisuje sledeći model.

Tačka M je **slučajno izabrana** u oblasti S u prostoru $R^k, k = 1,2,3,...$ ako je verovatnoća "izbora" podoblasti S_1 (tj. verovatnoća izbora tačke iz podoblasti S_1) oblasti S proporcionalna meri te podoblasti i ne zavisi od položaja i forme te podoblasti:

$$P(M \in S_1) = \frac{mera\ S_1}{mera\ S}$$

U jednodimenzionalnom slučaju mera je dužina, u dvodimenzionalnom slučaju to je površina, a u trodimenzionalnom – zapremina.

Ako su, na primer, C i D tačke na duži AB, tada je u smislu gornje definicije, verovatnoća "pogađanja" duži CD ako se bira tačka sa duži AB jednaka količniku dužina |CD| i |AB|. U dvodimenzionalnom slučaju je verovatnoća izbora tačke iz podoblasti S_1 oblasti S jednaka količniku površina podoblasti S_1 i oblasti S, dok je u trodimenzionalnom slučaju jednaka količniku zapremina.

U opisanoj situaciji govori se o **geometrijskoj verovatnoći**. Izbor neke tačke posmatrane oblasti S je elementaran ishod i prema navedenom svi elementarni ishodi su jednakoverovatni. Verovatnoća izbora jedne tačke jednaka je 0 (u bilo kom od tri navedena slučaja mera tačke je jednaka 0). Elementaran ishod stoga predstavlja **skoro nemoguć događaj**: verovatnoća da se desi je jednaka 0, iako se u svakom biranju izabere neka tačka. Suprotan skoro nemogućem je **skoro siguran događaj**: njegova verovatnoća je jednaka 1, ali se on ne mora ostvariti.

(nastavak na str. 28)

Dokaz Teoreme 4

Verovatnoća svakog elementarnog ishoda je neki broj iz intervala [0,1] . S obzirom da ne znamo kakve su, u opštem slučaju, verovatnoće elementarnih ishoda nekog prostora, to ćemo interval [0,1], podeliti na disjunktne podintervale čija je unija ceo interval [0,1], a zatim razmotriti koliko elementarnih ishoda može da ima verovatnoću iz određenog podintervala. Jedna moguća podela je $[1/2,1]$, $[1/2^2,1/2)$, $[1/2^3,1/2^2)$, …, $[1/2^n,1/2^{n-1})$,... . Elementarnih ishoda čije su verovatnoće iz $[1/2,1]$ može biti najviše 2, elementarnih ishoda čije su verovatnoće iz $[1/2^2,1/2)$, može biti najviše 2^2, …, elementarnih ishoda čije su verovatnoće iz $[1/2^n,1/2^{n-1})$, može biti najviše 2^n, … Kako imamo prebrojiv niz podintervala, a svaki je u vezi sa najviše konačno mnogo elementarnih ishoda, onda će broj ishoda čije verovatnoće pripadaju posmatranim podintervalima biti najviše prebrojiv. Ovo takođe znači da mogu da postoje elementarni ishodi čija su verovatnoće jednake 0, pa je dokaz završen.
Napomena. Druga moguća podela bila bi sa deobnim tačkama oblika $1/3^n$ – ponovite dokaz i u tom slučaju. Zašto nije moguće da podela bude na konačan broj intervala? Da li možemo da znamo koliko elementarnih ishoda može da ima verovatnoću iz intervala oblika (0,a), gde je a broj manji od 1?

Primer 7.

Na slučajan način se bira jedna tačka u trouglu ABC. Neka je AD težišna linija tog trougla. Odrediti verovatnoću da je slučajno izabrana tačka iz trougla ABC u trouglu ABD i odrediti verovatnoću da je slučajno izabrana tačka iz trougla ABC na težišnoj liniji AD.

Rešenje.

Verovatnoća da tačka bude u trouglu ABD jednaka je odnosu površine trougla ABD i površine trougla ABC, dakle 1/2. Verovatnoća da je tačka koja se bira u trouglu ABC na težišnoj liniji AD jednaka je odnosu površine težišne linije AD i površine trougla ABC, dakle 0. Posmatrani događaj je stoga skoro nemoguć.

ZADACI

1. Na slučajan način se bira jedna tačka u kvadratu ABCD. Odrediti verovatnoće događaja: A – slučajno izabrana tačka se nalazi bliže temenu A, nego ostalim temenima kvadrata, B – slučajno izabrana tačka se nalazi u krugu upisanom u kvadrat, i odrediti verovatnoću unije i verovatnoću preseka događaja A i B.
2. Na slučajan način se bira tetiva AB u krugu. Odrediti verovatnoću da dužina tetive bude veća od dužine stranice jednakostraničnog trougla upisanog u taj krug, ako se: a) tetiva bira tako da je paralelna jednom fiksiranom prečniku kruga, b) tetiva bira tako da je tačka A fiksirana na kružnici i c) tetiva bira izborom svog središta. *Napomena: ako se ne precizira način izbora, moglo bi izgledati da zadatak ima tri različita rešenja, jer će se u navedenim slučajevima dobiti različite verovatnoće. Zadatak je poznat kao Bertranov paradoks.*
3. Na slučajan način se bira jedna tačka u kocki ivice 1. Odrediti verovatnoću da je ta tačka u oktaedru čija su temena sredine strana kocke.
4. Dve osobe su se dogovorile da se sretnu na određenom mestu između 12h i 13h. Ako one dolaze nezavisno jedna od druge i na slučajan način, odrediti verovatnoću da će vreme između njihovih dolazaka biti kraće od 15 min.
5. U jednakostranični trougao je upisan krug i u svaki od delova izmedju temena i kruga je upisan po jedan (mali) krug. Odrediti verovatnoću da slučajno izabrana tačka iz trougla bude van konstruisanih krugova.

Relativna frekvencija i statistička homogenost

Neka se izvodi neki eksperiment sa slučajnim ishodima (bacanje kockice, biranje karte iz špila, ...) i neka se beleži pojavljivanje određenog događaja. Kada se izvede n eksperimenata, posmatrani događaj će se ostvariti k puta, gde je k broj između 0 i n. Količnik k/n se naziva ***relativna frekvencija*** posmatranog događaja.

Kad se povećava broj izvedenih eksperimenata, vrednosti relativne frekvencije će se menjati, ali ta promena nije po određenom pravilu (jer onda ni ishodi ne bi bili slučajni). Pa ipak, zapaža se izvesna pravilnost, u koju se svako može uveriti sprovođenjem jednostavnog eksperimenta – bacanjem numerisane kockice za igru i beleženjem pojavljivanja određenog broja. Ta pravilnost se ogleda u sve manjoj razlici između frekvencije i stvarne (teorijske) verovatnoće, računate pod pretpostavkom da je kockica fer. Ta specifična konvergencija relativnih frekvencija ka verovatnoći događaja naziva se ***statistička homogenost***. Ako se pak stvarna verovatnoća ne zna, ili je složena za izračunavanje, onda se, za dovoljno veliko n nepoznata verovatnoća aproksimira relativnom frekvencijom k/n. Detaljnija objašnjenja po ovom pitanju će biti data kasnije.

Modeliranje događaja

Rezultate slučajnih eksperimenata možemo modelirati (simulirati) na računaru i /ili korišćenjem tablica slučajnih cifara, čiji je jedan deo dat na sledećoj strani. Osobine i način konstrukcije ovakvih tablica će biti razmatrani kasnije. Sada će samo biti pokazano kako se može modelirati izvođenje eksperimenta u kojima su ishodi neki prirodni brojevi koji se mogu pojaviti sa istom verovatnoćom.

Ako treba modelirati slučajni izbor jednog od brojeva od 1 do 10, onda redom čitamo cifre iz tablice, a cifri 0 dodelimo vrednost 10.

Ako treba modelirati rezultate dobijene pri bacanju kockice, onda redom čitamo cifre iz tablice, odbacujući 7, 8, 9 i 0. To svakako nije najefikasniji način korišćenja tablica, pa ćemo kasnije dati i druge metode.

Tablice se mogu čitati s leva na desno, ali i odozgo na dole.

Kraj teorijskog dela ☺

Žozef Luj Fransoa **Bertran**, (1822-1900), francuski matematičar. Već sa 17 godina je bio doktor matematike, član Pariske akademije. Poznati su njegovi radovi u vezi sa konvergencijom redova, diferencijalnim jednačinama, teorijom verovatnoće.

ZADACI

1. U kutiji je 10 belih kuglica numerisanih od 1 do 10, i deset crvenih kuglica, numerisanih od 1 do 10. Na slučajan način se biraju dve kuglice istovremeno. Odrediti verovatnoću da su iste boje ili da su sa istim brojem.

2. Kockica se baca 12 puta. Odrediti verovatnoću da je a) zbir dobijenih brojeva 16, b) prvih 6 puta je dobijen isti broj, a sledećih 6 puta neki drugi isti broj, c) svaki broj je dobijen po dva puta, d) dobijeni su samo neparni brojevi, e) dobijeni su samo neparni brojevi, ali svaki po četiri puta.

3. Kockica se baca 5 puta. Odrediti verovatnoću da se dobiju a) tri ista i dva ista broja, b) različiti brojevi, c) četiri ista broja, d) bar dva puta broj 6.

☺ Koristeći tablice slučajnih cifara modelirati po 20 ishoda prema uslovima u zadacima 1, 2 i 3 i za posmatrane događaje uporediti dobijene relativne frekvencije sa izračunatim verovatnoćama.

22989	64262	12716	32910	32303	18783	65166	56622	93342
54147	01638	95954	66666	30544	67089	74650	19251	57440
07529	10668	23743	02743	10252	47893	04524	54252	47327
36379	13588	44587	31015	34971	25146	23958	05218	17157
38653	73761	61636	95667	03372	35800	83969	15872	33342
72327	65811	53782	01608	38741	58353	33188	48982	85028
41133	06312	13340	18870	27204	83187	58711	45893	17234
15039	81095	50787	28452	61100	39538	51559	91498	18517
40499	67587	16761	25929	43836	43466	91970	92624	46777

☺ Napisati program kojim će se na računaru modelirati ishodi eksperimenata opisanih u prethodnim zadacima i izračunavati relativne frekvencije posmatranih događaja za razne vrednosti broja modeliranih ishoda: 50, 100, 200, 500, 1000.

Pitanja uz prvu lekciju

1. Navesti nekoliko oblasti u kojima se primenjuje teorija verovatnoće.
2. Objasniti na primeru razliku između determinističkog i stohastičkog eksperimenta
3. Šta je elementarni ishod, a šta prostor elementarnih ishoda?
4. Navesti nekoliko primera prostora elementarnih ishoda sa konačno mnogo ishoda.
5. Navesti nekoliko primera prostora elementarnih ishoda sa prebrojivo mnogo ishoda.
6. Navesti nekoliko primera prostora elementarnih ishoda sa beskonačno neprebrojivo mnogo ishoda.
7. Šta je slučajni događaj? Šta označava iskaz „slučajni događaj se realizovao"?
8. Navesti primere slučajnih događaja sa konačno i sa beskonačno mnogo elementarnih ishoda.
9. Šta je to siguran, a šta nemoguć događaj, a šta skoro siguran, odnosno skoro nemoguć događaj?
10. Navesti neke operacije sa događajima.
11. Navesti neke osobine operacija sa događajima.
12. Navesti neke relacije sa događajima.
13. Šta znači ako se kaže da su događaji disjunktni?
14. Kada neki događaji čine potpun sistem događaja?
15. Kako glase De Morganovi obrasci?
16. Šta je polje događaja i koje su njegove osobine?
17. Koja je razlika između polja događaja i σ-polja događaja?
18. Definisati verovatnoću.
19. Šta označavaju termini: nenegativnost, normiranost i aditivnost verovatnoće?
20. Navesti neke osobine verovatnoće (npr. verovatnoća unije događaja).
21. Objasniti pojam neprekidnosti verovatnoće.
22. Kako glasi klasična definicija verovatnoće?
23. Šta je relativna frekvencija događaja?
24. Šta označava pojam statistička homogenost?
25. Kako se definiše geometrijska verovatnoća?